



I. Bac 2014 session normale

I. Soit la fonction g définie sur $D =]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0, +\infty[$ (0,5)

2. Vérifier que : $g(1) = 0$ puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$ (0,75)

II. On considère f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 1 cm)

1. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$; puis interprété géométriquement ce résultat. (0,5)

2. ..

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0,25)

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$) puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (1)

c. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$ (0,25)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ (1,5)

b. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que : $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (1)

4. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion, on ne le déterminera pas). (0,75)

5. On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$.

a. Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que $I = e$ (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $J = 2e - 1$ (0,5)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,5)

2. Bac 2015 session normale (fuite الذي تم تسريبه)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm).



I.

1. Montrer que : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ (D_f ensemble de définition de la fonction f) (0,5)

2. ..

a. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats (0,75)

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire que : la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction (0,5)

c. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat (pour calculer

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ on remarque $x(1 - \ln x) = x - x \ln x$) (0,5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$ pour tout x de D_f (0,75)

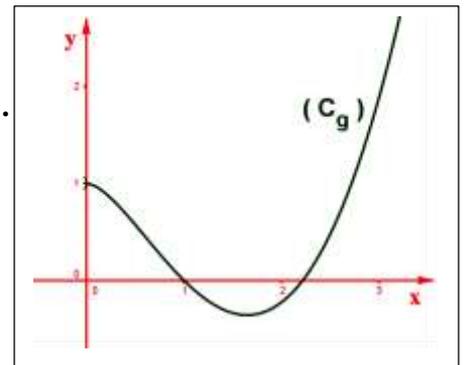
b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1; e[$ et $]e; +\infty[$ (1)

c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f (0,25)

II..

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

Et soit (C_g) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (voir la figure) .



1. ..

a. Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation suivante (E) $x \in]0; +\infty[$, $g(x) = 0$ (0,5)

b. On donne le tableau suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

montrer que l'équation (E) admet une solution α tel que $2,2 < \alpha < 2,3$ (0,5)

2. ..

a. Vérifier que : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$ pour tout x de D_f (0,25)

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$ coupe la courbe (C_g) en deux points d'abscisses respectives 1 et α (0,5)

c. A partir de la courbe (C_f) , déterminer le signe de g sur $[1, \alpha]$, et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1, \alpha]$ (0,5)

3. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C_f) de f et la droite (Δ) (1,25)

4. ..



a. Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (on remarquera $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{1-\ln x} \frac{1}{x}$ pour tout x de D_f).

..... (0,75)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

..... (0,75)

III. ..

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de \mathbb{N} .

..... (0,5)

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 2) c -)

..... (0,5)

3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer la limite de la suite (u_n) .

..... (0,75)

3. Bac 2015 session de rattrapage

I. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x \ln x$.

1. ..

a. Montrer que : $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

..... (0,5)

b. Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$..

..... (0,5)

2. Calculer : $g(1)$ puis en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

..... (0,75)

II. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$.

Et soit (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité de 1 cm) .

1. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat (pour calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ on

remarque $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$).

..... (0,75)

2. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ puis en déduire la nature du branche parabolique de la courbe (C_f) au voisinage $+\infty$.

..... (0,75)

3. .

a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

..... (0,75)

b. Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

..... (0,25)

c. Montrer que : la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$.

..... (0,5)

4. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (on admettra que la courbe de f admet deux points d'inflexions l' une a pour abscisse 1 et l'autre a pour abscisse comprise entre 2 et 2,5 et on prend $f(0,3) = 0$.

..... (0,75)

5. ..



a. Montrer que : $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$ (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,75)

6. Soit la fonction h définie sur \mathbb{R}^* par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2 \ln x}{|x|}$.

a. Montrer que la fonction h est paire et $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (0,75)

b. Construire dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C_h) de la fonction h (0,5)

4. Bac 2016 session de rattrapage

I. Soit la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln x$.

on considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$+\infty$	$+\infty$
		\searrow	\nearrow
		$g(1)$	

1. Calculer : $g(1)$ (0,25)

2. En déduire à partir du tableau que : $g(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (0,75)

I. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$

par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1) \ln x$.

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm) .

1. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat (0,75)

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (pour le calcul de a limite on pourra utiliser l'écriture suivante

$$f(x) = x \left[\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right] . \dots\dots\dots (0,5)$$

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées (0,5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (0,75)

b. En déduire que : la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$ (0,75)

4. ..

a. Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

b. Montrer que : $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) au point I . . (0,25)

c. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (T) et la courbe (C_f) (0,75)

5. ..



- a.** Montrer que : $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$ (0,5)
- b.** A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_1^2 (x+1) \ln x dx = 4 \ln 2 - \frac{7}{4}$ (0,75)
- c.** calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (0,5)
- 6.** Résoudre graphiquement l'inéquation : $x \in]0, +\infty[$; $(x+1) \ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$ (0,5)

5. Bac 2017 session normale

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$.

I. ..

- 1.** Vérifier que : $g(1) = 0$ (0,25)
- 2.** A partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :
- Montrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$.
 - Montrer que : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$ (1)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	\nearrow

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm) .

- 1.** Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat (0,5)
- 2. ..**
- a.** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25)
- b.** Montrer que : la courbe (C_f) admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est la droite (D) d'équation $y = x$ (0,75)
- 3. ..**
- a.** Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (1)
- b.** Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ (0,75)
- c.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$ (0,25)
- 4. ..**
- a.** Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$ (0,5)
- b.** En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées (0,5)
- c.** Montrer que : $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, 2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur $[1, 2]$ (0,75)



5. Construire dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (C_f) (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse comprise entre 2,4 et 2,5. (1)

6. ..

a. Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ (0,5)

b. Montrer que : $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (0,25)

c. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$ (0,5)

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (0,5)

II. On considère la suite numérique définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de \mathbb{N} (0,5)

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 4) c-). (0,5)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n) (0,75)

6. Bac 2018 session de rattrapage

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln x.$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction g sur $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$ $	$+$
$g(x)$	$ $	\nearrow
	$-\infty$	$+\infty$

I. ..

1. Calculer : $g(1)$ (0,25)

2. A partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ (0,5)

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm)

1. ..

a. Vérifier que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (0,5)

c. Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f) (0,25)

2. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat (0,75)



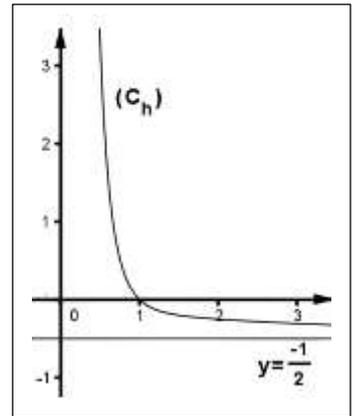
3. ..

- a. Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ (1)
- b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$. (0,5)
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$ (0,5)
- 4. Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm) (1)

III. On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1. ..

- a. Vérifier que : $h(1) = 0$ (0,25)
- b. Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h .
déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$ (0,75)



- 2. On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de \mathbb{N} (0,75)
 - b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III 1) b-) .
..... (0,75)
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite (0,5)

7. Bac 2019 session normale

Première Partie :

Soit la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1 cm) .

- 1. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement (0,5)
- 2. ..
 - a. Vérifier que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ (0,25)
 - b. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)
 - c. Montrer que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.
..... (0,5)



d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$ (0,75)

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$
et que pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$ (0,5)

b. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ (1)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f (0,5)

4. ..

a. Montrer que : $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ (0,5)

b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. (0,5)

5. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ puis on déduit la position relative de (C_f) et (Δ) (0,5)

b. Construire (Δ) et (C_f) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (1)

6. ..

a. Montrer que : $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$. (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,5)

Deuxième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. ..

a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de \mathbb{N} (0,5)

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. (0,5)

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,5)

2. Calculer la limite de la suite (u_n) (0,75)